IDEALGA TEGISHLILIK MASALASI

Xudoyberdiyeva Alfiya Shermurotovna, Jalilov Shaxriyor Sobirovich

("TIQXMMI" MTUning Qarshi irrigatsiya va agrotexnologiyalar instituti)

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada biz idealga tegishlilik masalasini Gryobner bazisi yordamida yechish mumkinligini ko'rsatamiz. Bo'linish algaritimi va Gryobner bazisidan bir vaqtning o'zida foydalanib, *idealga tegishlilik masalasini* yechishimiz mumkin: Bizga qandaydir $I =< f_1, \dots, f_s >$ ideal va f polinom berilgan bo'lsin, bizni qiziqtirayotgan asosiy masala f polinom I idealga tegishli yoki tegishli emasligini aniqlash.

Kalit so'zlar: Gryobner bazisi, Lex tartiblash, Buxberger algoritimi,qoldiq, polinom, ideal.

ABSTRACT

In this article, we show that the ideality problem can be solved using the Gröbner basis.Using the division algorithm and the Gröbner basis at the same time, we can solve the problem of ideality: Let us be given some ideal I=<f_1,…,f_s> and a polynomial f, the main problem we are interested in is determining whether the polynomial f belongs to the ideal I or not.

АННОТАЦИЯ

В этой статье мы показываем, что проблема идеальности может быть решена с использованием базиса Грёбнера. Используя одновременно алгоритм деления и базис Грёбнера, можно решить задачу идеальности:Пусть нам дан некоторый идеал I=<f_1,…,f_s> и многочлен f, основная задача, которая нас интересует, это определить, принадлежит ли многочлен f идеалу I или нет.

Ushbu maqolada biz idealga tegishlilik masalasini Gryobner bazisi yordamida yechish mumkinligini ko'rsatamiz. Bo'linish algaritimi va Gryobner bazisidan bir vaqtning o'zida foydalanib, *idealga tegishlilik masalasini* yechishimiz mumkin:

Bizga qandaydir $I =< f_1, \dots, f_s >$ ideal va f polinom berilgan bo'lsin, bizni qiziqtirayotgan asosiy masala f polinom I idealga tegishli yoki tegishli emasligini aniqlash.Buning uchun Buxbergar algoritmidan foydalanib I idealning $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ - Gryobner bazisini topamiz.Endi $f \epsilon I$, bo'lishi uchun faqat va faqat $\bar{f}^G = 0$ bo'lishi kerak.

1-misol. Bizga $I =< f_1, f_2 >=< x - y^2, x^3 - z^2 >\subset C[x, y, z]$,ideal va lex-tartiblash berilgan bo‘lsin.Ushbu $f = -xyz^2 - xy^7 + xy - y^3$, polinomni berilgan I idealga tegishli bo‘lish yoki bo‘lmasligini tekshiramiz. Berilgan $f_1 = x - y^2$ va $f_2 = x^3 - z^2$ polinomlar I idealning Gryobner bazisi bo‘lmaydi,chunki LT(S(f_1, f_2))=LT($-x^2y^2 + z^2$) $= x^2y^2$,monom <LT(f_1),LT(f_2)> $=< x >$ idealga tegishli emas.Masalani yechishni I idealning G Gryobner bazisini topishdan boshlaymiz.

S-polinomlardan foydalanib Gryobner bazislarini qo‘lda hisoblab topamiz:

$I =< f_1, f_2 >=< x - y^2, x^3 - z^2 >\subset C[x, y, z]$, va lex-tartiblash,

$f_1 = x - y^2,\ \ f_2 = x^3 - z^2,\ \ \ f_1, f_2 \in C[x, y, z]$

$\alpha = (1,0,0),\ \beta = (3,0,0)\ \ \Rightarrow \gamma = (3,0,0)$.

$\Rightarrow S(f_1, f_2) = \frac{x^3}{x} \cdot f_1 - \frac{x^3}{x^3} \cdot f_2 = x^2(x - y^2) - 1(x^3 - z^2) = x^3 - x^2y^2 - x^3 + z^2 = -x^2y^2 + z^2$;

$I =< f_1, f_2 >=< x - y^2, x^3 - z^2 >,\ \ S(f_1, f_2) = -x^2y^2 + z^2 \in I$ va bo‘linish algaritimidan foydalanib oson tekshirish mumkin, $(-x^2y^2 + z^2)$ ni $F = \{f_1, f_2\}$ ga bo‘lgandagi qoldiq $-y^6 + z^2 \neq 0$,ga teng va noldan farqli chiqadi.

Demak uni $f_3 = -y^6 + z^2$ orqali belgilab F to‘plamga qo‘shib olamiz.Endi hosil bo‘lgan $= \{f_1, f_2, f_3\}$, to‘plam uchun yuqoridagi qilingan amallarni ketma ket bajaramiz.

$\overline{S(f_1, f_2)}^F = 0$, bo‘lishini tekshirish qiyin emas. Endi $S(f_1, f_3)$ ni hisoblaymiz. $\alpha = (1,0,0)$, $\beta = (0,6,0)\ \ \Rightarrow \gamma = (1,6,0)$.

$\Rightarrow S(f_1, f_3) = \frac{xy^6}{x} \cdot f_1 - \frac{xy^6}{(-y^6)} \cdot f_3 = y^6(x - y^2) + x(-y^6 + z^2) = xy^6 - y^8 - xy^6 + xz^2 = xz^2 - y^8$, bo‘linish algoritimini qo‘llasak $\overline{S(f_1, f_3)}^F = 0$, natijani olamiz.Endi $S(f_2, f_3)$ ni hisoblaymiz, $\alpha = (3,0,0)$, $\beta = (0,6,0)\ \ \Rightarrow \gamma = (3,6,0)$.

$\Rightarrow S(f_2, f_3) = \frac{x^3y^6}{x^3} \cdot f_2 - \frac{x^3y^6}{(-y^6)} \cdot f_3 = y^6(x^3 - z^2) + x^3(-y^6 + z^2) = x^3y^6 - y^6z^2 - x^3y^6 + x^3z^2 = x^3z^2 - y^6z^2$, yana bo‘linish algoritmini qo‘llab ushbu $\overline{S(f_2, f_3)}^F = 0$, natijani olamiz.Demak olingan natijalar quyidagicha: $F = (f_1, f_2, f_3)$,uchun barcha $1 \leq i \leq j \leq 3$,larda $\overline{S(f_i, f_j)}^F = 0$,ga teng bo‘ldi. $\Rightarrow\{f_1, f_2, f_3\} = \{x - y^2, x^3 - z^2, -y^6 + z^2\}$ – polinomlar $I =< f_1, f_2 >=< x - y^2, x^3 - z^2 >$ idealning Gryobner bazisi ekanligi kelib chiqadi..

Topilgan bazisni to‘g’ri hisoblanganini tekshirish uchun Meple 12 dasturidan foydalanishimiz mumkin.Buning uchun Meple 12 da Gryobner paketini ishga tushiramiz va quyidagi natijani olamiz.

$$G = \{f_1, f_2, f_3\} = \{x - y^2, x^3 - z^2, y^6 - z^2\}$$

Endi bo‘linish algoritmidan foydalanib f ni G ga bo‘lamiz.

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

$$f = x \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 - xy \cdot f_3 + 0.$$

Qoldiq nolga teng chiqganligidan $f \in I,$ ekanligi kelib chiqadi.

2-misol. $I =< f_1, f_2 >=< x^3 - xy^2,\ xy - z^2, x^4 - y^2 z >\subset C[x, y, z],$ va lex-tartiblash bo‘lsin.Ushbu $f = x^2y^2z + xy^3$ polinomni $f \in I?$, idealga tegishli yoki tegishli emasligini tekshib ko‘ramiz. Berilgan idealning yasovchilari Gryobner bazisini tashkil qilmaydi.Meple 12 dan foydalangan holda Gryobner bazisini topamiz.

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{xy - z^2, y^4 - y^2z, -y^2z + y^2x^2,\ x^3 - xy^2\}.$$

Ushbu bazis keltirilgan Gryobner bazisini tashkil qiladi.

Bo‘linish algoritmidan foydalangan holda f ni G ga bo‘lamiz va quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

$$f = x \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + y \cdot f_4 + 2xy^3.$$

Qoldiq nolga teng chiqmadi, demak bundan kelib chiqadiki $f \,\overline{\in}\, I$ ekan.

3-misol. Ushbu $f = x^2yz - 2xy^2 + 2x$,polinomni $I =< f_1, f_2, f_3 >=< xz - y, xy + 2z^2, y - z >\subset C[x, y, z]$ idealga tegishli yoki tegishli emasligini tekshirib ko‘ramiz. Berilgan to‘plam elementlari I idealning Gryobner bazisini tashkil qilmaydi. Biz uning G Gryobner bazisini Meple 12 dan foydalangan holda topamiz va quyidagi natijaga ega bo‘lamiz

$$G = \{f_1, f_2, f_3\} = \{xz - z, y - z, 2z^2 + z\}.$$

Bu bazis I idealning keltirilgan Gryobner bazisidan iborat bo‘ladi.

Endi f ni topilgan G ga bo‘lib berilgan savolni javobini izlaymiz:

$$f = \left(x^2y + xy - \frac{3}{2}\right) \cdot f_1 + (-2xy + 3xz) \cdot f_2 + \left(\frac{3}{2}x\right) \cdot f_3 + 2x + 1.5z.$$

Qoldiq $2x + 1.5z$ ga teng chiqdi demak bundan kelib chiqadiki $f \notin I$ bo‘lar ekan.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO’YXATI

1. Adams W., Loustaunan P. (1994), AnIntoduction to Groebner Bases, Graduate Studias in Mathematics, 3 Amer. Soc. Providence.

2. Dube T.W. (1990) The structure of polynomial ideals and Groebner bases, SIAM J.Comput., 19. 750-755.

3. Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений// М. Ж. МЦНМО, 2003.

4. Бухбергер Б. Алгоритмический метод в теории полиномиальных идеалов// Компьютерная алгебра. Символика и алгебраические вычисления. М.: Мир, 1986.

5. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.:Наука,1979.

ISSN 2181-2632 www.involta.uz

6. Говорухин В., Цибулин П., Компьютер в математическом исследовании. –С-Питербург, Питер, 2002.

7. Давенпорт Дж., Сире Й., Турнье Е. Компьютерная алгебра. – М.: Мир,1991.

8. Кириенко Денис Павлович, Система компьютерной алгебры Maple, Среднее общеобразовательная школа №179 МИОО, г.Москва.

ISSN 2181-2632 www.involta.uz